



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Унети наслов тематске јединице која се обрађује



Радна недеља	Тематска целина		Циљ
3	Нумеричке методе за решавање нелинеарних једначина		Овладавање методама за решавање нелинеарних једначина
	Тематска јединица	Егзистенција решења. Изолација корена	Студент ће бити способан да препозна егзистенцију решења која ће бити илустрована графичким методама. Биће упознат са довољним условима изолованости корена.
		Методе засноване на сужавању интервала (Метода половљења интервала, Regula falsi)	Студент ће бити упознат са суштином метода заснованих на сужавању интервала и биће способан да самостално примени методе половљења интервала и Regula falsi.

Унети наслов тематске јединице која се обрађује



Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
3	Егзистенција решења. Изолација корена	Студент ће бити способан да препозна егзистенцију решења која ће бити илустрована графичким методама. Биће упознат са довољним условима изолованости корена.
3	Методе засноване на сужавању интервала (Метода половљења интервала, Regula falsi)	Студент ће бити упознат са суштином метода заснованих на сужавању интервала и биће способан да самостално примени методе половљења интервала и Regula falsi.

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

Uvodne napomene:

1. **Oznake:** $C[a, b]$ – skup funkcija koje su neprekidne na odsečku $[a, b]$

$C^1[a, b]$ – skup funkcija čiji je prvi izvod neprekidan na $[a, b]$

2. **Prva Koši – Bolcanova teorema:** Ako je funkcija f neprekidna na odsečku $[a, b]$ i na krajevima odsečka ima vrednosti različitog znaka, tada postoji c takvo da je $f(c) = 0$.

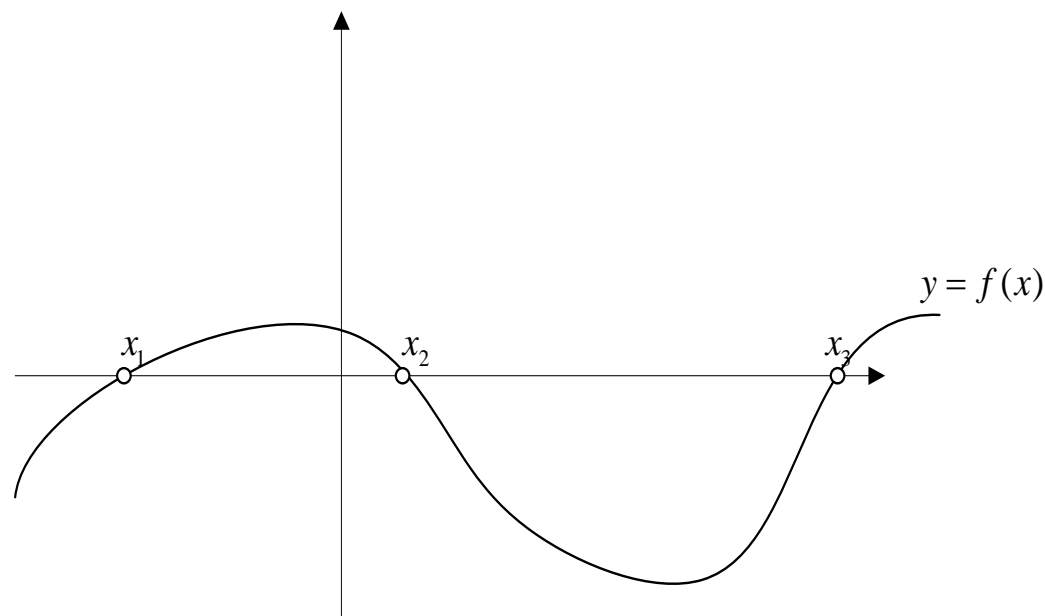
3. **Princip matematičke indukcije:** Tvrdjenje $T(n)$ je tačno za svaki prirodan broj n ako:

1. $T(n)$ je tačno za $n=1$ (ili za $n=n_0$)

2. Iz pretpostavke da je $T(n)$ tačno za neko $n=k$ sledi da je tačno i za $n=k+1$.

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$



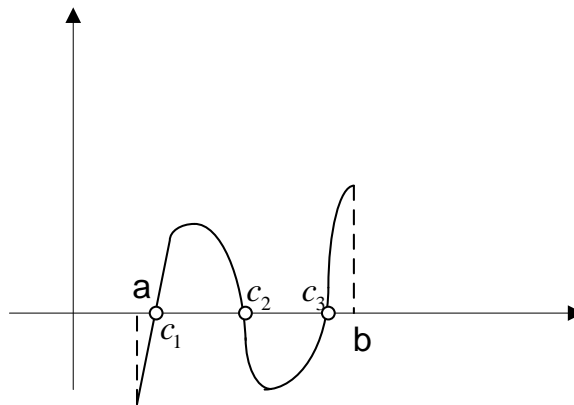
Etape:

- 1) izolovanje rešenja (korena)**
- 2) nalaženje približne vrednosti rešenja**

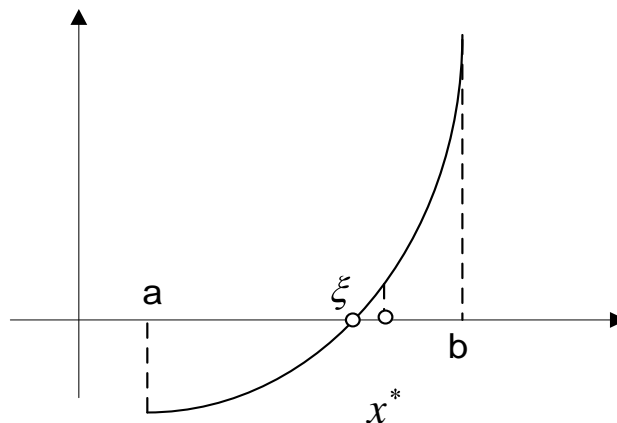
Egzistencija rešenja. Izolacija korena



Teorema: Neka je $f \in C[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$. Tada postoji $c \in (a, b)$ za koje je $f(c) = 0$.



Jedinstvenost rešenja:



(a, b) – interval izolacije rešenja

Teorema (o oceni greške): Neka je ξ tačna, a x^* približna vrednost korena jednačine i $\xi, x^* \in [a, b]$, $f \in C^1[a, b]$, $f'(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$.

Tada je

$$|\xi - x^*| \leq \frac{|f(x^*)|}{m_1}; \quad m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

Dokaz:

$$f(\xi) - f(x^*) = f'(c)(\xi - x^*) \quad (\text{Lagranžova teorema})$$

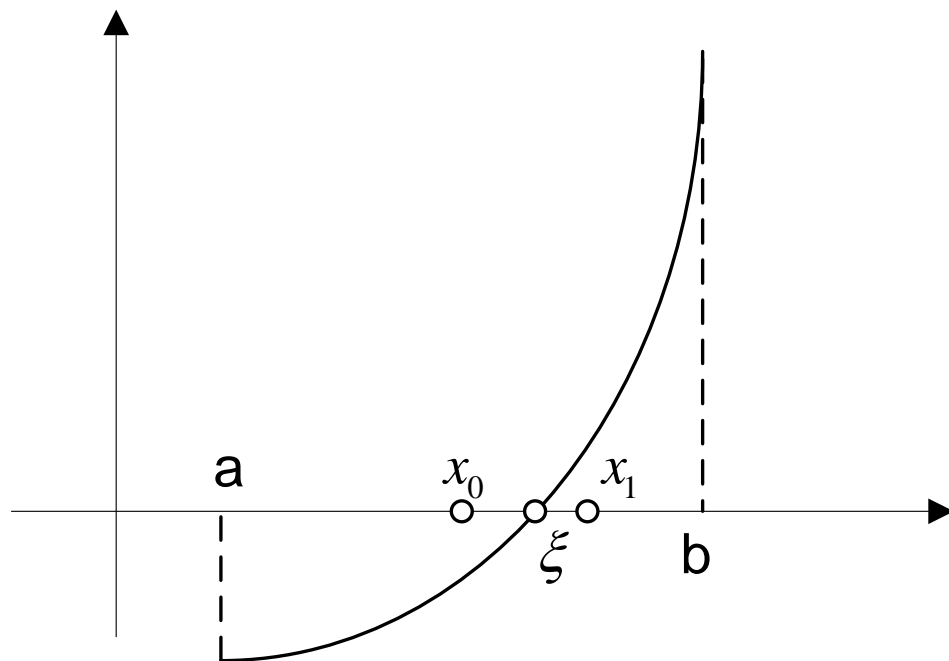
$$f(\xi) = 0 \Rightarrow \xi - x^* = -\frac{f(x^*)}{f'(c)},$$

$$|\xi - x^*| = \frac{|f(x^*)|}{|f'(c)|} \leq \frac{|f(x^*)|}{m_1}.$$

Oznake: $m_k = \min_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|$; $M_k = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|$

NUMERIČKE METODE: 1) metode sužavanja intervala
2) metode zasnovane na teoremi o fiksnoj tački

METODA POLOVLJENJA INTERVALA



$$[a_0, b_0] = [a, b]$$

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, x_0] & \text{ako je } f(a_0)f(x_1) < 0 \\ [x_0, b_0] & \text{ako je } f(x_1)f(b_0) < 0 \end{cases}$$

\vdots

$$x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k), (k = 0, 1, \dots)$$

Metode zasnovane na sužavanju intervala (Metoda polovljenja intervala, Regula falsi)



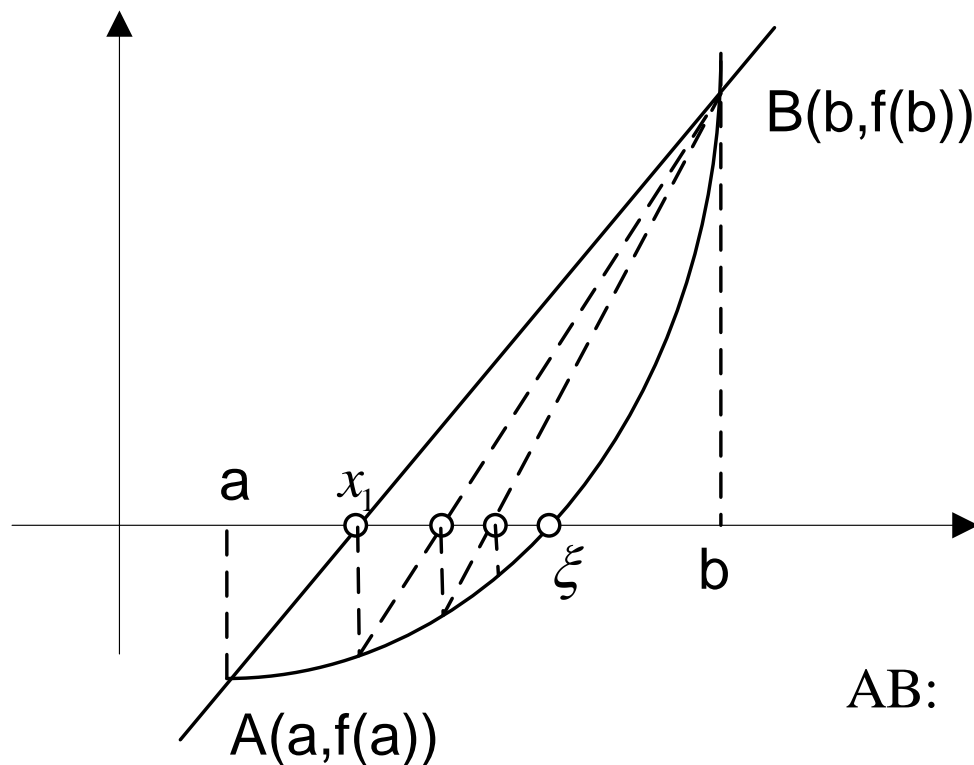
Teorema: Neka $f \in C[a, b]$ gde je (a, b) interval izolacije korena jednačine $f(x) = 0$. Tada niz $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ konvergira korenu ξ jednačine i važi

$$|x_n - \xi| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Dokaz:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - a}{2^n} = \frac{b - a}{2^{n+1}} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

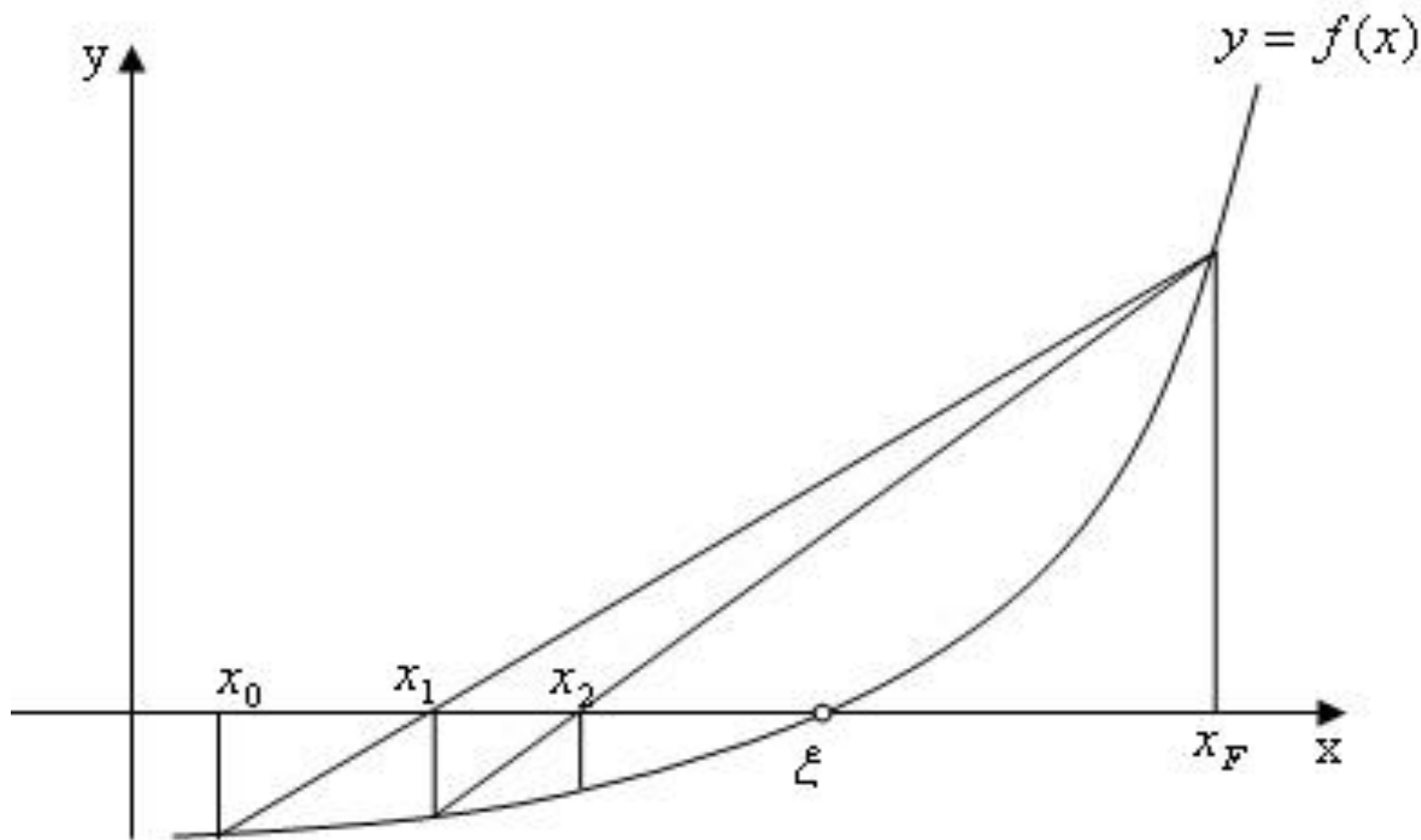
METODA REGULA FALSI



$$AB: \quad y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

$$y = 0: \quad x = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a) = x_1$$

Metode zasnovane na sužavanju intervala (Metoda polovljenja intervala, Regula falsi)



Metode zasnovane na sužavanju intervala (Metoda polovljenja intervala, Regula falsi)



Teorema (o izboru fiksne tačke): Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidno diferencijabilna na segmentu $[a, b]$ i u svakoj tački $x \in [a, b]$ postoji $f''(x)$. Dalje, neka su ispunjeni uslovi:

1. $f(a)f(b) < 0$,
2. $f'(x)$ i $f''(x)$ su stalnog znaka na $[a, b]$.

Ako su $x_F, x_0 \in [a, b]$ tačke za koje su zadovoljeni uslovi

$$f(x_F)f(x_0) < 0, \quad f''(x_F)f(x_F) > 0, \quad (1)$$

tada niz $\{x_n\}$ definisan rekurentnom fomulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_F - x_n)}{f(x_F) - f(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

konvergira ka korenu $\xi \in (a, b)$ jednačine $f(x) = 0$.

Metode zasnovane na sužavanju intervala (Metoda polovljenja intervala, Regula falsi)



Dokaz: Pretpostavimo, određenosti radi, da je

$$(\forall x \in [a, b]) \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0.$$

Iz (1) sledi: $f(x_F) > 0$ i $f(x_0) < 0$.

Pošto je f monotono rastuća biće $x_0 < \xi$ i $x_F > \xi$.

Matematičkom indukcijom dokazaćemo da je

$$x_n < \xi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

tj. da je niz $\{x_n\}$ ograničen odozgo.

$n=0$: $x_0 < \xi$ (tačno)

$n=k$: $x_k < \xi$ (pretpostavka)

$n=k+1$: ako je

$$g(x) = x - f(x) \cdot \frac{x_F - x}{f(x_F) - f(x)}$$

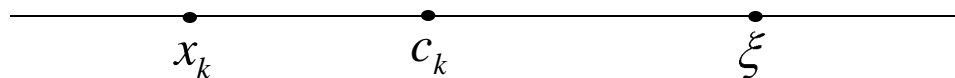
onda se može dokazati da je

$$g'(x) = \frac{f(x_F)}{f(x_F) - f(x)} \cdot \left(1 - \frac{x_F - x}{f(x_F) - f(x)} \cdot f'(x) \right)$$

Metode zasnovane na sužavanju intervala (Metoda polovljenja intervala, Regula falsi)



Tada je $x_{k+1} - \xi = g(x_k) - g(\xi) = g'(c_k)(x_k - \xi)$, $c_k \in (x_k, \xi)$.



Međutim,

$$g'(c_k) = \frac{f(x_F)}{f(x_F) - f(c_k)} \cdot \left(1 - \frac{x_F - c_k}{f(x_F) - f(c_k)} f'(c_k) \right) = \frac{f(x_F)}{f(x_F) - f(c_k)} \cdot \left(1 - \frac{f'(c_k)}{f'(\bar{c}_k)} \right), \quad c_k < \bar{c}_k < x_F$$

Funkcija f i njen izvod f' su monotonno rastući na $[a, b]$, pa je $f(x_F) - f(c_k) > 0$ i $0 < f'(c_k) < f'(\bar{c}_k)$. Dakle $g'(c_k) > 0$, pa je

$$x_{k+1} - \xi = g'(c_k)(x_k - \xi) < 0,$$

jer je prema induktivnoj hipotezi $x_k < \xi$.

(Kraj dela dokaza matematičkom indukcijom)

Metode zasnovane na sužavanju intervala (Metoda polovljenja intervala, Regula falsi)



Dalje je

$$x_{n+1} - x_n = -f(x_n) \frac{x_F - x_n}{f(x_F) - f(x_n)} > 0, \quad (3)$$

jer je $f(x_n) < 0$. Niz $\{x_n\}$ je konvergentan: $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Pri tome je

$$c \leq \xi < x_F.$$

Prelaskom u (3) na graničnu vrednost kad $n \rightarrow \infty$ dobija se

$$c = c - f(c) \frac{x_F - c}{f(x_F) - f(c)}.$$

Odavde sledi da je $f(c) = 0$, a pošto je ξ jedini koren jednačine $f(x) = 0$, to je $c = \xi$, odnosno

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

(Kraj dokaza).

Ocena greške:

Primenom Lagranžove teoreme dobija se:

$$\begin{aligned}x_{n+1} - \xi &= x_n - \xi - \frac{f(x_n)(x_n - x_F)}{f(x_n) - f(x_F)} = x_n - \xi - \frac{f(x_n) - f(\xi)}{f(x_n) - f(x_F)}(x_n - x_F) = \\x_n - \xi - \frac{(x_n - \xi)f'(c_1)}{(x_F - x_n)f'(c_2)}(x_F - x_n) &= (x_n - \xi)\left(1 - \frac{f'(c_1)}{f'(c_2)}\right) = (x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - \xi)\left(1 - \frac{f'(c_1)}{f'(c_2)}\right) = \\&= (x_n - x_{n+1})\left(1 - \frac{f'(c_1)}{f'(c_2)}\right) + (x_{n+1} - \xi)\left(1 - \frac{f'(c_1)}{f'(c_2)}\right).\end{aligned}$$

Iz prethodnog sledi

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f'(c_1) - f'(c_2)}{f'(c_1)}(x_{n+1} - x_n)$$

odnosno

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_{n+1} - x_n|.$$

ПИТАЊА:

1. Шта је интервал изолације корена једначине?
2. Навести довољне услове за изолацију корена.
3. Објаснити идеју методе половљења интервала.
4. Формулисати и доказати теорему о конвергенцији методе половљења интервала.
5. Објаснити идеју методе Regula Falsi.
6. Формулисати теорему о конвергенцији методе Regula Falsi.
7. Истаћи главне елементе доказа теореме о конвергенцији методе Regula Falsi.
8. Извести формулу за оцену грешке методе Regula Falsi.



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА